Stage de M1 à Montevideo, Uruguay
IMERL Universidad de la República
IRL 2030 du CNRS

Yohann Legargent

5 juillet 2025

0.1 Introduction

Ce document est un mémoire réalisé le long d'un stage à la faculté d'ingénierie de Montevideo, Uruguay, portant sur la dynamique symplectique et les fibrés de Green et organisé par Ezequiel Maderna.

L'objectif du stage est de se familiariser avec les concepts fondamentaux de dynamique symplectique et d'étudier la dynamique du problème à trois corps.

0.1.1 Le problème des N corps

Le problème des N corps consiste en l'étude du mouvement de N corps célestes, simplifiés en des points d'une espace vectoriel, sous l'action de la gravité newtonienne. L'accélération de chaque corps est donnée par l'équation suivante

$$m_i x_i'' = G \cdot \sum_{j>i} \frac{m_i m_j \cdot (x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|^3}$$

Sont déjà connues les orbites du problème à un corps et à deux corps, mais à partir de trois corps, le comportement devient chaotique et est alors toujours un sujet de recherche actuel.

0.2 Remerciements

Je remercie Francoise Dal'bo et les équipes de l'IRMAR et de l'IMERL pour avoir organisé et financé ce stage. Je remercie aussi l'AMI, qui m'a permis d'obtenir une bourse pour rembourser en partie les dépenses. Je remercie enfin Ezequiel Maderna pour m'avoir fait découvrir son sujet de recherche, mais aussi Tristan Baudouin, Henri Drouhin et Juan Kurchan, sans qui les deux mois passés en Uruguay auraient été bien moins agrébales.

1 Géométrie symplectique

Définition 1.1. Forme symplectique

Soit M une variété différentielle. On appelle forme symplectique sur M toute 2-forme ω fermée, telle qu'en tout $p \in M$, ω_p soit non dégénérée.

On appelle variété symplectique la paire (M, ω).

Exemple -

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$, que l'on munit de la forme bilinéaire alternée ω_* de matrice $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$ dans la base canonique. $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ est alors une variété symplectique, où ω_0 est la 2-forme constante égale à ω_*.

Plus généralement, pour tout espace vectoriel E, tout forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur E vue comme 2-forme constante induit une structure de variété symplectique.

Définition 1.2. Symplectomorphisme

Soit (M, ω) et (M', ω') deux variétés symplectiques. On dit qu'elles sont *symplectomorphes* s'il existe un difféomorphisme $\varphi : M \longrightarrow M'$ tel que $\varphi^*\omega = \omega'$. Un telle application est alors appelée *symplectomorphisme*.

Théorème 1.1. Forme normale pour les espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et ω une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E. Il existe une base de E pour laquelle la matrice de ω est $\left[\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Autrement dit, tout espace vectoriel symplectique est symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Preuve -

On procède par récurrence sur la dimension de E.

- On vérifie trivialement que le théorème est vrai si $\dim(E) = 0$ et que si $\dim(E) = 1$, il n'y a pas de forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E.

- Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que le théorème soit vrai si $\dim(E) < 2k$. On suppose que $\dim(E) \in \{2k, 2k+1\}$ et qu'il existe une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E. Alors il existe $e, f \in E$ tels que $\omega(e, f) \neq 0$. On construit $W = \text{Vect}\{e, f\}$ et $W^\omega = \{u \in E; \forall w \in W, \omega(u, w) = 0\}$. On vérifie que $W \oplus W^\omega = E$, dans quel cas, $dim(W^\omega) = dim(E) - 2 < 2k$. Alors puisque $\omega|_{W^\omega}$ est une forme bilinéaire alternée sur W^ω, $\dim(W^\omega)$ est paire. Donc $\dim(E)$ aussi. De plus, il suffit de prendre une base de W^ω vérifiant le théorème puis de normaliser la base (e, f) de W pour obtenir une base de E qui vérifie le théorème.

Par récurrence, la dimension de E est paire et une telle base existe toujours.

Remarque - Orthogonal symplectique

Soit E un espace vectoriel et ω une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur E. Pour W sous-espace vectoriel de E, on définit $W^\omega = \{u \in E; \forall w \in W, \omega(u, w) = 0\}$. Cet ensemble est un espace vectoriel et est appelé *orthogonal symplectique* de W.

Corollaire 1.2. Dimension des variétés symplectiques

Toute variété symplectique (M, ω) est de dimension paire.

Preuve -

Il suffit d'observer qu'en tout $x \in M$, (T_xM, ω_x) forme un espace vectoriel symplectique, qui est de dimension paire.

1.1 Théorème de Darboux

L'objectif de cette sous-section est de donner une preuve du théorème de Darboux, reformulée à partir de [4]

Théorème 1.3. Théorème de Darboux

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et $x \in M$ un point. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x dans M, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ et une carte $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi^*\omega = \omega_0$ sur $\mathcal{U}$.

C'est équivalent à dire que toute variété symplectique de dimension $2n$ est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

1.1.1 Restriction à $\mathbb{R}^{2n}$

Soit (M, ω) une variété symplectique et $x \in M$.
Pour commencer, on voudrait construire une carte locale qui vérifierait la condition au moins en x. Pour cela, on se donne une carte locale ψ telle que $\psi(0) = x$. $d\psi_0$ induit un isomorphisme entre T_xM et $\mathbb{R}^{2n}$, on considère alors l'espace vectoriel symplectique $(\mathbb{R}^{2n}, (d\psi_0)^*\omega_x)$.

Par le théorème 1.1, il existe un symplectomorphisme f entre ce dernier et $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, c'est-à-dire que $f^*(d\psi_0)^*\omega_x = \omega_0$. Puisque $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$, on a $df_v = f$ en tout $v \in \mathbb{R}^{2n}$.

On pose $\phi = \psi \circ f$, ce qui donne $d\phi_0 = d\psi_{f(0)} \circ f = d\psi_0 \circ f$. En appliquant le pullback à ω_x, on obtient :

$$\begin{aligned}(d\phi_0)^*\omega_x &= \omega_x(d\phi_0^{\oplus 2}) \\ &= \omega_x((d\psi_0 \circ f)^{\oplus 2}) \\ &= f^*\omega_x(d\psi_0^{\oplus 2}) \\ &= f^*(d\psi_0)^*\omega_x \\ &= \omega_0\end{aligned}$$

De plus $\phi(0) = \psi(f(0)) = \psi(0) = x$. Donc ϕ vérifie en x les conditions recherchées.

Désormais, on utilisera ϕ pour ramener localement ω dans $\mathbb{R}^{2n}$ et simplifier les calculs futurs. On définit alors $\omega_1 = \phi^*\omega$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de x dans $\Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$.

1.1.2 Idée de la suite de la preuve

On oublie (M, ω) un moment et on se concentre sur $\mathbb{R}^{2n}$ muni des deux formes ω_0 et ω_1, on souhaite démontrer le théorème de Darboux dans ce cas précis. À noter que, là où ω_0 est constante en le point de $\mathbb{R}^{2n}$ choisi, ce n'est pas le cas de ω_1.

L'idée de Moser est de considérer une famille lisse de formes différentielles allant de ω_0 à ω_1 et essayer d'exprimer chacune des formes de cette famille comme la tirée en arrière de ω_0 par un difféomorphisme. On montre que le champ de vecteurs engendré par cette famille de difféomorphismes, si elle existe, vérifie une certaine équation différentielle.
Si cette équation possède une solution lisse, celle-ci engendre une famille de difféomorphismes. Pour conclure, il faudra alors exprimer ω_1 comme la tirée en arrière de ω_0 par le difféomorphisme de cette famille qui lui est associé, puis ajouter que ω est la tirée en arrière de ω_1 par ϕ^{-1}. Par composition, le théorème sera prouvé.

1.1.3 Astuce de Moser (*Moser's Trick*)

Soit $\boldsymbol{\omega} : [0,1] \longrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ définie par $\boldsymbol{\omega} : t \longmapsto \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. On notera $\omega_t = \boldsymbol{\omega}(t)$. Supposons qu'il existe $\boldsymbol{\rho} : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{2n})$, telle que pour tout t, on ait $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$, où on note $\rho_t = \boldsymbol{\rho}(t)$. On considère le champ de vecteurs dépendant du temps $\boldsymbol{X} : [0,1] \longrightarrow \Gamma(\mathbb{R}^{2n})$ défini par $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\rho}'(t) \circ \rho_t^{-1}$ et on note $X_t = \boldsymbol{X}(t)$. Enfin, on notera $\boldsymbol{\rho^*\omega} : t \longrightarrow \rho_t^*\omega_t$.

On sait déjà que $\boldsymbol{\rho^*\omega}$ est constante égale à ω_0, donc que $[\boldsymbol{\rho^*\omega}]' = 0$, on voudrait exprimer la dérivée d'une manière plus utile.

On considère $f : [0,1]^2 \longrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ donnée par $f(x,y) = \rho_x^*\omega_y$. On a $\boldsymbol{\rho^*\omega} = f(\mathrm{id}_{[0,1]}, \mathrm{id}_{[0,1]})$. D'où $[\boldsymbol{\rho^*\omega}]'(t) = \partial_1 f(t,t) + \partial_2 f(t,t)$ par la règle de la chaîne.

On souhaite alors calculer les deux dérivées partielles en question. Soit $(x,y) \in [0,1]^2$.

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\rho_x^*\omega_{y+h} - \rho_x^*\omega_y\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \rho_x^* \left(\frac{\omega_{y+h} - \omega_y}{h}\right) \\ &= \rho_x^* \left(\boldsymbol{\omega}'(y)\right) \\ &= \rho_x^* \left(\omega_1 - \omega_0\right)\end{aligned}$$

Le second calcul étant plus compliqué, on va devoir évaluer les formes différentielles en un point $p \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y)_p &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((\rho_{x+h}^*\omega_y)_p - (\rho_x^*\omega_y)_p\right)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((\omega_y)_{\rho_{x+h}(p)}(d_p\rho_{x+h}^{\oplus 2}) - (\omega_y)_{\rho_x(p)}(d_p\rho_x^{\oplus 2})\right)\end{aligned}$$

On souhaite retrouver dans cette équation la dérivée de Lie du champ de vecteur X_x, en voici une définition :

Définition 1.3. Dérivée de Lie

Soit M une variété différentielle, et X un champ de vecteurs sur M, la dérivée de Lie le long de X est définie par

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{L}_X : & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \Omega^k(M)\\ & \omega & \longmapsto & \lim_{h\to 0} \frac{\rho_h^*\omega - \omega}{h}\end{array}$$

Où ρ_h est le flot associé au champ de vecteurs X.

Plus généralement, pour une famille de difféomorphismes ρ_t, on peut définir la dérivée de Lie le long de son champ de vecteurs dépendant du temps de manière similaire.

Dans le cas présent, comme la dérivée de Lie se fait en 0, il nous faut définir $\boldsymbol{\sigma} : t \longmapsto \rho_{x+t} \circ \rho_x^{-1}$.

L'équation s'écrit alors :

$$\partial_1 f(x,y)_p = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((\omega_y)_{\sigma_h\circ\rho_x(p)}((d_{\rho_x(p)}\sigma_h \circ d_p\rho_x)^{\oplus 2}) - (\omega_y)_{\rho_x(p)}(d_p\rho_x^{\oplus 2})\right)$$

On va monter que ce résultat vaut $(\rho_x^*\mathcal{L}_{X_x}\omega_y)_p$.

Pour commencer, on doit déterminer le champ de vecteurs dépendant du temps associé à σ_h, soit Y_h ce champ. Alors

$$\boldsymbol{\sigma}'(h) = Y_h \circ \sigma_h = Y_h \circ \rho_{x+h} \circ \rho_x^{-1}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}'(h) &= \left[l \mapsto \rho_{x+l} \circ \rho_x^{-1}\right]'(h)\\ &= \left[l \mapsto \rho_{x+l}\right]'(h) \circ \rho_x^{-1}\\ &= \left[l \mapsto \rho_l\right]'(x+h) \circ \rho_x^{-1}\\ &= \boldsymbol{\rho}'(x+h) \circ \rho_x^{-1}\\ &= X_{x+h} \circ \rho_{x+h} \circ \rho_x^{-1}\end{aligned}$$

En combinant les équations, on a $Y_h = X_{x+h}$.

On calcule

$$\mathcal{L}_{X_x}\omega_y = \mathcal{L}_{Y_0}\omega_y = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma_h^*\omega_y - \omega_y}{h}$$

Alors

$$\rho_x^*\mathcal{L}_{X_x}\omega_y = \lim_{h\to 0} \frac{\rho_x^*\sigma_h^*\omega_y - \rho_x^*\omega_y}{h}$$

En évaluant en p, on obtient :

$$(\rho_x^*\mathcal{L}_{X_x}\omega_y)_p = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((\omega_y)_{\sigma_h\circ\rho_x(p)}((d_{\rho_x(p)}\sigma_h \circ d_p\rho_x)^{\oplus 2}) - (\omega_y)_{\rho_x(p)}(d_p\rho_x^{\oplus 2})\right)$$

Par égalité point par point, on a donc :

$$\partial_1 f(x,y) = \rho_x^* \mathcal{L}_{X_x} \omega_y$$

En recombinant toutes les parties :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\rho^*\omega}]'(t) &= \rho_t^* \mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \rho_t^*(\omega_1 - \omega_0) \\ &= \rho_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0)\end{aligned}$$

1.1.4 L'équation de Moser

Au vu du résultat précédent, l'équation $[\boldsymbol{\rho^*\omega}]' = 0$ se réécrit :

$$\rho_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0) = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$$

Ce qui se simplifie en

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0 = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$$

On utilise alors la formule de Cartan : $\mathcal{L}_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_X(d\omega)$, qui donne

$$d\iota_{X_t}\omega_t + \iota_X(d\omega_t)\omega_1 - \omega_0 = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$$

or $d\omega_t = 0$, donc

$$d\iota_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0 = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$$

Comme $\mathbb{R}^{2n}$ est contractile et $d(\omega_1 - \omega_0) = 0$, le lemme de Poincaré assure qu'il existe $\mu \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ telle que $\mu(0) = 0$ et $d\mu = \omega_1 - \omega_0$.

L'équation est alors $d\iota_{X_t}\omega_t + d\mu = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$

c'est-à-dire $d(\iota_{X_t}\omega_t + \mu) = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$

Il suffit que $\iota_{X_t}\omega_t + \mu = 0 \qquad ;\forall t \in [0,1]$ pour que l'équation soit vérifiée, on va alors se restreindre à résoudre cette équation.

1.1.5 Conclusion de la preuve

Soit $t \in [0,1]$ fixé, l'équation donne : $\omega_{t,x}(X_t(x), \cdot) = \mu \qquad ;\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$.
Cette équation peut être réécrite sous forme matricielle

$$M_{t,x}X_t(x) = \mu \qquad ;\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$$

Puisque $\omega_{t,x}$ est non-dégénérée pour tout x, la matrice $M_{t,x}$ est toujours inversible et on obtient

$$X_t(x) = M_{t,x}^{-1}\mu \qquad ;\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$$

L'équation admet donc toujours une solution, qui est lisse car $M_{t,x}$ l'est.

A partir de ce champ de vecteurs dépendant du temps, on peut reconstruire le flot qui lui est associé ρ_t. Par construction $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, $\omega_1 = \rho_1^{-1*}\omega_0$. Or comme on avait aussi $\omega = \phi^{-1*}\omega_1$ sur $\mathcal{U}$, on obtient $\omega = \phi^{-1*}\rho_1^{-1*}\omega_0$ sur $\mathcal{U}$.

Le théorème est donc bien démontré

1.2 Sous-espaces lagrangiens

Dans cette section, on étudie les propriétés de certaines sous-variétés de variétés symplectiques

Définition 1.4. Sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et ω une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

— Si $\omega|_{F\times F}$ est non-dégénérée, F est dit *symplectique*.

— Si $\omega|_{F\times F}$ est nulle, F est dit *isotrope*.
— Si F^ω est isotrope, F est dit *coisotrope*.
— Si F est isotrope et coisotrope, F est dit *lagrangien*.

Proposition 1.4. Isotropie et dimension

Soit E un espaces vectoriel et ω une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
— Si F est isotrope, $\dim(F) \leq \frac{1}{2}\dim(E)$.
— Si F est coisotrope, $\dim(F) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$.
— Si F est lagrangien, $\dim(F) = \frac{1}{2}\dim(E)$.

Preuve -
Il suffit de prouver la première affirmation car les deux autres s'en déduisent trivialement.

On suppose F isotrope, soit le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\omega} & E & \longrightarrow & F^* \\ & v & \longmapsto & [w \mapsto \omega(v,w)] \end{array}$$

Par théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\ker(\tilde{\omega})) + \dim(\mathrm{im}(\tilde{\omega}))$. Or $\ker(\tilde{\omega}) = F^\omega$ par définition et $\mathrm{im}(\tilde{\omega}) = F^*$. Ainsi

$$\dim(E) = \dim(F^\omega) + \dim(F^*) = \dim(F^\omega) + \dim(F)$$

Comme F est isotrope, $F \subset F^\omega$, donc $\dim(E) \geq 2\dim(F)$. Ce qui conclus.

Si F est coisotrope, on applique la preuve à F^ω, si F est lagrangien, il est isotrope et coisotrope, d'où $\frac{1}{2}\dim(E) \leq \dim(F) \leq \frac{1}{2}\dim(E)$.

Définition 1.5. Sous-variété lagrangienne

Soit (M,ω) une variété symplectique et L une sous-variété de M. Si pour tout $l \in L$, T_lL est un sous-espace lagrangien de (T_lM, ω_l), alors L est dite *lagrangienne*.

Définition 1.6. Gradient symplectique

Soit (M,ω) une variété symplectique et $H \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, on appelle *gradient symplectique* de H l'unique champ de vecteurs, noté X_H tel que $\iota_{X_H}\omega = dH$.

2 Minimisation de l'action lagrangienne

2.1 Contexte

Définition 2.1. Fibré cotangent

Soit M une variété différentielle, on appelle *fibré cotangent* de M la variété différentielle

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x M^*)$$

On munit canoniquement T^*M d'une forme symplectique ω en posant $\omega = d\lambda$ où

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & T^*M & \longrightarrow & T^*T^*M \\ & (x,\rho) & \longmapsto & [((x,\rho),v) \mapsto \rho(v)] \end{array}$$

Définition 2.2. Lagrangien

On appelle *lagrangien* d'un système dynamique une fonction $L : I \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ qui dépend de la dynamique étudiée. Ici, I est un intervalle réel.

Exemple - Pour le système du pendule, M est le cercle S^1, TM est un cylindre et $L : (t,x,v) \longmapsto \frac{1}{2}\|v\|^2 - 1 + \cos(x)$.

Définition 2.3. Hamiltonien

On appelle *hamiltonien* d'un système dynamique la transformée de Legendre de son lagrangien. On le note $H : I \times T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.4. Action Lagrangienne

Soit $\gamma : [0,T] \longrightarrow M$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle *action lagrangienne* de γ la quantité

$$A_L(\gamma) = \int_{[0,T]} L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')$$

L'objectif de cette section est de déterminer les courbes γ qui minimisent l'action lagrangienne entre deux points. Informellement, ces courbes représentent "le chemin le moins coûteux" entre deux points de M. C'est une propriété locale des orbites des systèmes dynamiques que l'on souhaite étudier.

2.2 Équation d'Euler-Lagrange

2.2.1 Définitions

Définition 2.5. Espace des courbes

Soit $x, y \in M$ et $T > 0$. On dénote l'ensemble des courbes sur M allant de x à y en temps T par $\mathcal{C}(x,y,T)$. Il s'agit d'une variété différentielle de dimension infinie.

Définition 2.6. Variation à extrémités fixées d'une courbe

Soit $x, y \in M$, $T > 0$ et $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,T)$. On appelle *variation à extrémités fixées* de γ, une application lisse $\Gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathcal{C}(x,y,T)$ telle que $\Gamma(0) = \gamma$.

Il est important de remarquer qu'une variation Γ de γ est une courbe lisse dans $\mathcal{C}(x,y,T)$ passant par γ en 0.

Définition 2.7. Vecteur tangent à $\mathcal{C}(x,y,T)$

Soit $x, y \in M$, $T > 0$ et $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,T)$. Un vecteur tangent à $\mathcal{C}(x,y,T)$ en γ est la dérivée en 0 d'une courbe lisse sur $\mathcal{C}(x,y,T)$ passant par γ en 0. Il est donc de la forme $\Gamma'(0)$ pour Γ variation à extrémités fixées de γ.

Cette dérivée peut s'interpréter comme un champ de vecteur le long de γ nul en 0 et en T, on le notera v.

Définition 2.8. Courbe extrêmale

Soit $x, y \in M$, $T > 0$. On dit qu'une courbe $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, T)$ est extrêmale si $dA_L(\gamma) = 0_{T^*_\gamma \mathcal{C}(x,y,T)}$. C'est équivalent à ce que pour toute variation à extrêmités fixées Γ de γ, on ait $[A_L \circ \Gamma]'(0) = 0$.

2.2.2 Dérivation de l'équation

On peut facilement se convaincre que si une courbe est extrêmale, alors toute restriction de cette courbe est aussi extrêmale.

Quitte à se restreindre à des cartes locales sur M on peut donc exprimer l'action lagrangienne dans une carte locale $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de M.

$$A_L(\gamma) = \int_{[0,T]} L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') = \int_{[0,T]} L(\mathrm{id}, \varphi(\gamma), d\varphi(\gamma'))$$

et on peut alors définir une action lagrangienne sur les courbe α de $\mathbb{R}^n$ par

$$A_{L^*}(\alpha) = \int_{[0,T]} L^*(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') = \int_{[0,T]} L(\mathrm{id}, \varphi^{-1}(\alpha), d\varphi^{-1}(\alpha))$$

De cette manière, on se restreint à l'étude du problème pour unelagrangien défini sur $\mathbb{R}^n$.

Soit γ une courbe de $\mathbb{R}^n$ et Γ une variation à extrémités fixées de γ. On notera $\nabla_2 L$ et $\nabla_3 L$ les dérivées (vectorielles) de L par rapport à sa deuxième et sa troisième variable respectivement. Enfin, on notera

$$\begin{array}{rccc} \dot{\Gamma} : & [-\varepsilon, \varepsilon] & \to & \mathcal{C}^\infty([0,T], T\mathbb{R}^n) \\ & s & \mapsto & \Gamma(s)' \end{array}$$

L'équation est $[A_L \circ \Gamma]'(0) = 0$. Or pour $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, nous avons :

$$[A_L \circ \Gamma]'(s) = \int_{[0,T]} \left\langle \nabla_2 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)), \Gamma'(s) \right\rangle + \left\langle \nabla_3 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)), \dot{\Gamma}'(s) \right\rangle$$

En appliquant la règle d'intégration par parties au second terme de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{[0,T]} \left\langle \nabla_3 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)), \dot{\Gamma}'(s) \right\rangle &= \left[\left\langle \nabla_3 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)), \Gamma'(s) \right\rangle \right]_0^T \\ &\quad - \int_{[0,T]} \left\langle \left[\nabla_3 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)) \right]', \Gamma'(s) \right\rangle \\ &= - \int_{[0,T]} \left\langle \left[\nabla_3 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)) \right]', \Gamma'(s) \right\rangle \end{aligned}$$

La deuxième égalité découle du fait que, puisque la variation Γ est à extrémités fixées, $\Gamma'(s)(0) = 0 = \Gamma'(s)(T)$.

En remplaçant cette valeur, on obtient donc

$$[A_L \circ \Gamma]'(s) = \int_{[0,T]} \left\langle \nabla_2 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)) - \left[\nabla_3 L(\mathrm{id}, \Gamma(s), \dot{\Gamma}(s)) \right]', \Gamma'(s) \right\rangle$$

En évaluant en 0, on trouve la condition d'extrêmalité de γ appliquée en un champ de vecteurs tangents à γ quelconque v :

$$0 = \int_{[0,T]} \left\langle \nabla_2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') - [\nabla_3 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')]', v \right\rangle$$

En posant $v = \nabla_2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') - [\nabla_3 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')]'$, on obtient la condition équivalente :

$$\nabla_2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') - [\nabla_3 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')]' = 0$$

Après développement de la dérivée :

$$\nabla_2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') - \nabla_2 \nabla_3 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')\gamma' - \nabla_3^2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')\gamma'' = 0$$

Si l'on suppose L strictement convexe superlinéaire sur les espaces tangents, on peut affirmer que $\nabla_3^2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')$ est en tout temps une matrice définie positive, donc inversible, ce qui donne

$$\gamma'' = \left[\nabla_3^2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')\right]^{-1} \left(\nabla_2 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma') - \nabla_2 \nabla_3 L(\mathrm{id}, \gamma, \gamma')\gamma'\right)$$

2.3 Différentielle d'un flot et équation de Jacobi

On souhaite désormais obtenir une équation vérifiée par la différentielle, si elle existe, d'un flot Hamiltonien.

Pour cela on peut encore se placer dans une carte locale de la variété et étudier le problème restreint à $\mathbb{R}^n$.

Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On définit le flot associé par $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ comme solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \varphi' & = X \circ \varphi \\ \varphi(0) & = \mathrm{id}_\Omega \end{cases}$$

On supposera φ continue et on notera $\varphi^t = \varphi(t)$.

Pour un point $p \in \mathbb{R}^n$, un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, $s \in]-\eta, \eta[$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit le taux d'accroissement de φ dans la direction v par

$$h_{p,v,s}(t) = \frac{\varphi^t(p + sv) - \varphi^t(p)}{s}$$

En dérivant cette définition, on obtient

$$\begin{aligned} h'_{p,v,s}(t) &= \frac{\varphi'(t)(p + sv) - \varphi'(t)(p)}{s} \\ &= \frac{X(\varphi^t(p + sv)) - X(\varphi^t(p))}{s} \end{aligned}$$

On souhaite étudier le comportement de ce taux d'accroissement lorsque s tends vers 0.

$$h'_{p,v,s}(t) \underset{s \to 0}{\to} d_p[X \circ \varphi^t](v)$$

On peut réécrire cette limite :

$$\begin{aligned} d_p[X \circ \varphi^t](v) &= \left[(d_{\varphi^t(p)} X) \circ d_p \varphi^t\right](v) \\ &= [d_{\varphi^t(p)} X](d_p \varphi^t(v)) \end{aligned}$$

De plus, on a $\lim_{s \to 0} h_{p,s,v}(t) = d_p \varphi^t(v)$. On peut alors affirmer que la différentielle de φ^t, notée ici $h_{p,v,0}$ doit vérifier l'équation différentielle suivante :

$$h'_{p,v,0} = d_{\varphi^t(p)} X \circ h_{p,v,0}$$

Cette équation est appelée Équation de Jacobi.

2.4 Champs de Jacobi

Dans cette sous-section, l'objectif est d'étudier la variation d'une géodésique d'une variété Riemannienne quand on change légèrement ses paramètres de départ.

Plus précisément, pour un point p d'une variété différentielle et v un vecteur tangent en p de norme 1. On sait qu'il existe une unique géodésique de la variété passant par p avec vitesse v. On veut alors étudier comment les chemins tracés par les géodésiques varient lorsque l'on déplace le point p le long de la variété et que l'on tourne le vecteur tangent.

Considérons donc $x :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ et $v :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow TM$ telle qu'en tout s, $v(s) \in T_{x(s)}M$. On considère en chaque s la géodésique γ_s de M déterminée par $\gamma_s(0) = x(s)$, $\gamma_s'(0) = v(s)$. On construit enfin la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : &]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\eta,\eta[& \longrightarrow & M \\ & (s,t) & \longmapsto & \gamma_s(t) \end{array}$$

Lorsque la fonction x est nulle, on parle de *variation verticale* de γ. Lorsque v est nulle, on parle de *variation horizontale*.

Définition 2.9. Champ de Jacobi
On appelle *champ de Jacobi* le long de γ_0 tout champ de vecteurs le long de γ_0 donné par $\partial_1\Gamma(0,\cdot)$, pour des fonctions x, v lisses quelconques.

Tout champ de Jacobi peut être décrit par la somme d'un champ de Jacobi issu d'une variation verticale, et d'un champ de Jacobi issu d'une variation horizontale.

Étudions quelle équation doit vérifier un champ de Jacobi.
Soit le flot géodésique ϕ de la variété M. L'équation de Jacobi donne pour $p \in M$, $v \in T_pM$ et $h : t \longmapsto d_p\phi^t(v)$.

$$h'(t) = d_{\phi^t(p)}X(h(t))$$

Ici, $p = x(0)$ et $v = x'(0)$, donc $h(t) = d_{x(0)}\phi^t(x'(0)) = \partial_1\Gamma(0,t)(x'(0))$. De plus le champ X est le champ géodésique de M. l'équation devient alors :

$$[\partial_1\Gamma(0,\cdot)]'(t) = d_{\Gamma(0,t)}X(\partial_1\Gamma(0,t))$$

En pratique, on utilise les champs de Jacobi pour étudier la stabilité des orbites d'un système dynamique à de petites variations près. Pour ce faire, on considère la variété riemannienne M, munie de la métrique de Jacobi-Maupertuis, pour laquelle les géodésiques sont les orbites du système dynamique. Dans le fibré tangent TM, la métrique de Jacobi-Maupertuis peut se relever pour que les orbites, que l'on considère avec leurs vitesses, soient encore des géodésiques. On étudie alors les champs de Jacobi sur ce fibré tangent.

3 Le problème des N corps

3.0.1 Principes de base d'étude d'un système mécanique

Lorsque l'on cherche à étudier un système mécanique, il est primordial d'isoler des quantités qui sont conservées lors de son évolution. Un exemple de telle quantité est l'énergie totale, soit la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

En notant $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in[\![0,N-1]\!]}$ les positions de tous les corps et $\mathbf{m} = (m_i)_{i\in[\![0,N-1]\!]}$ leurs masses, les quantités physiques préservées par le problème des N corps sont

— L'énergie totale : $E(\mathbf{x}) = E_c(\mathbf{x}) + E_p(\mathbf{x})$

— La quantité de mouvement : $P(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{m}, \mathbf{x}' \rangle$.

— Le moment cinétique : $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'$.

3.1 Expression de la dynamique dans E^N

L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielles pour chaque paire de corps. Elle a pour valeur $E_p(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) = G \cdot \sum_{j>i} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|}$. Où G est la constante gravitationelle. La dynamique des corps étant la même en fixant sa valeur à 1, nous adopterons cette convention.

L'énergie cinétique est donnée par la formule suivante $E_c(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|x_i'\|^2$. On peut exprimer cette quantité plus simplement en changeant de produit scalaire :

Définition 3.1. Produit scalaire des masses

On note $\mathcal{X} = E^N$ l'ensemble des configurations des N-corps dans l'espace de Hilbert de dimension finie $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On définit sur $\mathcal{X}$ le produit scalaire suivant, appelé *produit scalaire des masses* :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{X}} = \sum_{i\in[\![0,N-1]\!]} m_i \langle x_i, y_i \rangle$$

Avec cette définition, l'énergie cinétique devient $E_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}'\|_{\mathcal{X}}^2$. L'énergie s'écrit donc $E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}'\|_{\mathcal{X}}^2 + U(\mathbf{x})$ et le hamiltonien du système est $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|_{\mathcal{X}}^2 + U(\mathbf{x})$.

Définition 3.2. Centre de masse

On appelle *centre de masse* du système la somme des positions des corps, pondérés par leurs masses : $O = \sum_i m_i x_i$. L'ensemble des configurations pour lesquelles O est nul sera noté $\mathcal{X}_0$.

Proposition 3.1.

$\mathcal{X}_0$ est l'orthogonal de l'espace $\Delta = \{(z)_{i\in[\![0,n-1]\!]}; z \in E\}$ pour le produit scalaire des masses.

Preuve -

Soit $\mathbf{x} \in \Delta^{\perp_{\mathcal{X}}}$. Pour tout $z \in E$, $\langle \mathbf{x}, (z)_i \rangle_{\mathcal{X}} = 0$. Par $\mathbb{R}$-linéarité du produit scalaire des masses, il est équivalent de vérifier que pour une base hilbertienne $(e_k)_k$ de E, $\forall k \in [\![1, N]\!]$: $\langle \mathbf{x}, (e_k)_i \rangle_{\mathcal{X}} = 0$.

Ce calcul donne que chaque coordonnée du centre de masse de la configuration $\mathbf{x}$ dans cette base est nulle, et donc que $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$.

On a alors $\mathcal{X} = \Delta \overset{\perp_{\mathcal{X}}}{\oplus} \mathcal{X}_0$.

Définition 3.3. Inertie

Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, le moment d'inertie du système à trois corps est $I(\mathbf{x}) = \sum_i m_i \|x_i\|^2$.

Définition 3.4. Configuration centrale

Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, on dit que $\mathbf{x}$ est une *configuration centrale* lorsque l'accélération du système est proportionnelle à sa position dans $\mathcal{X}$. C'est équivalent à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla U(\mathbf{x}) = \lambda \nabla I(\mathbf{x})$$

3.2 Coordonnées triangulaires dans le plan

Pour trois corps dans le plan, l'espace des configurations $\mathcal{X} \cong \mathbb{C}^3$. On souhaite décomposer l'espace $\mathcal{X}_0$ en deux sous-espaces orthogonaux pour le produit scalaire des masses.

Il y a une décomposition naturelle qui peut venir à l'esprit, faisant intervenir certaines configurations centrales.

Proposition 3.2.
Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$, si $\mathbf{u}$ est orthogonal à $\mathbf{v}$ et à $i\mathbf{v}$, alors $\mathbf{u}\mathbb{C}$ est orthogonal à $\mathbf{v}\mathbb{C}$.
Preuve -
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On calcule $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}\rangle_{\mathcal{X}}$ et on trouve l'expression suivante :

$$\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}\rangle_{\mathcal{X}} = \mathrm{Re}(\alpha\beta)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}(\alpha\beta)\langle \mathbf{u}, i\mathbf{v}\rangle_{\mathcal{X}}$$

3.2.1 Première décomposition

Pour commencer, notons que dans $\mathcal{X}_0$, l'inertie I du système peut se réécrire, par un jeu de produits scalaires, en $I(\mathbf{x}) = \sum_{j>i} m_i m_j \|x_j - x_i\|^2$.

On observe que l'inertie du système ainsi que son énergie potentielle dépendent uniquement des distances entre les corps et non de leurs positions. Pour une fonction $\mathbf{r} : \mathcal{X}_0 \to \mathbb{R}^3_+$ qui à une configuration associe les distances deux à deux des corps, on peut définir U_r et I_r telles que $U = U_r \circ \mathbf{r}$ et $I = I_r \circ \mathbf{r}$.

On peut donc montrer que si ∇U_r est proportionnel à ∇I_r au point $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, alors la configuration $\mathbf{x}$ est une configuration centrale.

On obtient de cette manière que certains triangles équilatéraux sont configurations centrales du problème à trois corps de centre de masse nul. L'ensemble de tels triangles peut s'écrire $T = \left(1 + \alpha\{1, e^{i\tau/3}, e^{-i\tau/3}\}\right)\mathbb{C}$ pour une valeur de α donnée par l'identité :

$$m_0(1+\alpha) + m_1(1+\alpha e^{i\tau/3}) + m_2(1+\alpha e^{-i\tau/3}) = 0$$

En réorganisant les termes, puis en posant $\xi = m_0 + m_1 e^{i\tau/3} + m_2 e^{-i\tau/3}$, et $M = m_0 + m_1 + m_2$ on obtient

$$\alpha = \frac{M}{\xi}$$

Proposition 3.3. Orthogonal de T
L'orthogonal de T dans $\mathcal{X}_0$ est l'ensemble

$$\left\{\frac{1}{m_0}, \frac{e^{-i\tau/3}}{m_1}, \frac{e^{i\tau/3}}{m_2}\right\}\mathbb{C}$$

Preuve -
Il suffit de calculer les produit scalaire des masses de $(1+\frac{M}{\xi}\{1, e^{i\tau/3}, e^{-i\tau/3}\})$ avec $\left\{\frac{1}{m_0}, \frac{e^{-i\tau/3}}{m_1}, \frac{e^{i\tau/3}}{m_2}\right\}$ et $i\left\{\frac{1}{m_0}, \frac{e^{-i\tau/3}}{m_1}, \frac{e^{i\tau/3}}{m_2}\right\}$

Ici, il est bon d'observer que, lorsque les masses sont égales, les deux espaces T et $T^{\perp_{\mathcal{X}}}$ sont tous deux constitués de triangles équilatéraux centrés en 0 parcourus dans des orientations différentes, en particulier, ce sont deux espaces de configurations centrales.

3.2.2 Intérêt en pratique

L'intérêt d'une telle décomposition est que, lorsque les position et les vitesses à l'origine sont des configurations centrales du même type, alors l'orbite du mouvement reste dans l'ensemble des configurations centrales de ce type.

En particulier, quand les masses sont égales, puisque les deux espaces de la décomposition sont faits de configurations centrales, toute orbite peut s'écrire comme somme orthogonale de deux orbites, chacune contenue dans l'un de ces sous-espaces.

Proposition 3.4.

Soit T l'espace défini précédemment, $\mathbf{x}_0 \in T, \dot{\mathbf{x}}_0 \in T$. L'orbite x de conditions initiales $x(0) = \mathbf{x}_0, x'(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ est incluse dans T.

Preuve -

On exprime x par une série de la forme

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \mathbf{u}_n$$

Où les $\mathbf{u}_n$ sont des configurations quelconques. En dérivant k fois, on obtient :

$$x^{(k)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+k)!}{n!} t^n \mathbf{u}_{n+k}$$

En évaluant en $t = 0$, on obtient, pour $k \geq 2$:

$$\mathbf{x}_0^{(k)} = k!\mathbf{u}_k = \lambda \mathbf{x}_0^{(k-2)} = \lambda(k-2)!\mathbf{u}_{k-2}$$

Par récurrence, la série s'exprime uniquement par des facteurs de $\mathbf{x}_0$ et $\dot{\mathbf{x}}_0$.

L'orthogonalité de la décomposition permet d'écrire tout champ de Jacobi associé à une orbite comme somme orthogonale de champs de Jacobi dans les directions des sous-espaces, et ainsi d'étudier la stabilité de celle-ci à de petites variations près de manière plus simple. Il suffit en effet d'étudier la stabilité pour les champs de Jacobi sur les sous-espaces.

Proposition 3.5. Expression de la dynamique à masses égales

On se place dans le problème de trois corps de masses égales et de centre de masse nul, on considère $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ dans la décomposition en deux triangles équilatéraux, que l'on nommera T_+ et T_-. On a les formules suivantes :

- $\mathbf{x} = z \cdot T_+ + w \cdot T_-$ où $z, w \in \mathbb{C}$
- $I(\mathbf{x}) = 3m \cdot (|z|^2 + |w|^2)$
- $U(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{3}}{3} m^2 \cdot (\frac{1}{|z-w|} + \frac{1}{|z-we^{i\tau/3}|} + \frac{1}{|z-we^{-i\tau/3}|})$

Preuve - Calcul

3.3 Coordonnées polygonales à masses égales dans le plan

Pour N corps dans le plan, il n'existe pas de décomposition canonique de l'espace $\mathcal{X} = \mathbb{C}^N$ qui soit canonique. En effet, il y a, pour quatre corps de masses égales dans le plan, 50 configurations centrales différentes [5] .

Ici je donne un exemple de décomposition qui peut être vue comme une généralisation de celle donnée précédemment dans le cas de N corps de masse égales dans le plan.

On définit, pour $k \in [\![0, N-1]\!]$ les espaces

$$E_k = \{z \cdot \left(e^{i\frac{jk\tau}{N}}\right)_{j\in[\![0,N-1]\!]}, z \in \mathbb{C}\}$$

Lorsque N est premier, chaque espace est le plan complexe engendré par une manière différente de parcourir les sommets d'un N-gone. Ce sont N plans, que l'on peut vérifier orthogonaux deux à deux, donc leur somme engendre $\mathcal{X}$.

$$\mathcal{X} = \bigoplus_{k=0}^{N} E_k$$

De plus, $E_0 = \Delta$, donc $\mathcal{X}_0 = \bigoplus_{k=1}^{N} E_k$

3.4 Orbites fameuses du problème à trois corps

3.4.1 Mouvements homographiques

Définition 3.5. Orbite homographique

On dit qu'une orbite du problème à trois corps est homographique lorsqu'à tout instant la position des trois corps est une homographie de leur position à l'instant initial.

Exemples -

a) La configuration d'Euler : En tout temps, les trois corps sont alignés, à deux corps fixés, la position du troisième est déterminée comme racine d'un polynôme de degré 5. C'est une orbite instable. Décomposée en somme de triangles équilatéraux, les valeurs de z et w auront toujours le même module.

b) Les configurations de Lagrange : En tout temps, les trois corps forment un triangle équilatéral, ces orbites peuvent être décrites par les points de Lagrange. Les points évoluent alors le long d'ellipses Keplériennes. Décomposée en somme de triangles équilatéraux, l'une de z ou de w est constante nulle.

3.4.2 L'orbite du huit

L'orbite du huit est une orbite particulière du problème à trois corps de masses égales [1]. A l'instant initial, les corps sont alignés, puis évoluent le long d'une même courbe, dont on ne connaît pas le caractère algébrique. Quand les trois corps suivent une même orbite, on dit qu'il s'agit d'une choréographie.

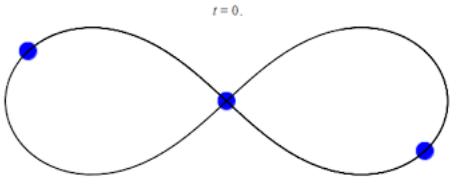


FIGURE 1 – Choréographie des trois corps dans l'orbite du huit (Wikipédia)

Lors de cette évolution, la position des trois corps alterne entre des positions colinéaires et des triangles isocèles, le tout en permutant les points.

En étudiant cette orbite dans les coordonnées pour la décomposition en triangles équilatéraux, on obtient deux courbes symétriques pour z et w.

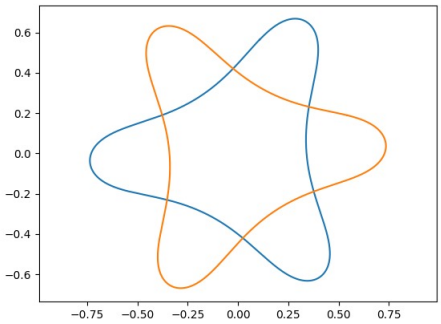


FIGURE 2 – Tracé des courbes décrites par les coordonnées z, w du huit en triangles équilatéraux, les deux courbes sont parcourues en sens inverses. En $t = 0$, l'argument de z est $\tau/12$, l'argument de w est $-\tau/12$. Dessin réalisé en simulant l'orbite sur Python (Henri Drouhin - Yohann Legargent)

Dans la figure précédente, lorsque z et w sont de même taille, les trois corps sont alignés, les configurations ioscèles apparaissent quand z est de module maximal et w de module minimal, et inversement. Au vu de la symétrie d'angle $\tau/3$ de l'orbite, on peut quotienter le plan par la rotation de même angle, et observer la courbe dessinée par z dans ce nouvel espace.

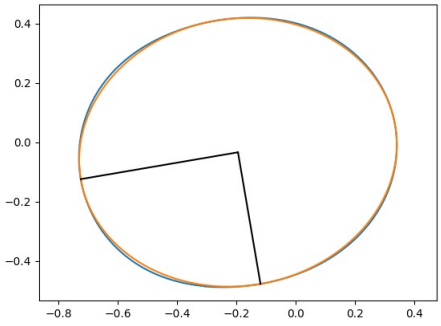


FIGURE 3 – Courbe tracée par z dans le quotient (en bleu) et ellipse la plus proche de la courbe (en orange). Graphique réalisé sur Python à partir de la simulation de la figure 2 (Henri Drouhin)

3.4.3 Famille P12 et stabilité de l'orbite du huit

Il existe une famille continue d'orbites du problème des trois corps dans l'espace $\mathbb{R}^3$, liant l'orbite de Lagrange à celle du huit. On l'appelle la famille P12. [2]

D'autre part, C. Simó a étudié numériquement la stabilité de l'orbite du huit à petite variation des paramètres de départ et en a conclu que l'orbite était stable pour certains triplets de masses. [3]

4 Bilbiographie

Références

[1] Chenciner A. and Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics*, 2000.

[2] Marchal C. The family p12 of the three-body problem - the simplest family of periodic orbits, with twelve symmetries per period. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2000.

[3] Simó C. Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2002.

[4] Ana Cannas da Silva. *Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry.* IMPA, 2002.

[5] Yoccoz J.C. Description conjecturale des configurations centrales dans le problème planaire des 4 corps.